

۱- به ازای کدام مقادیر b معادلات منفرد است؟ در این صورت g را طوری بیابید که معادلات سازگار باشد و دو پاسخ را بیابید.

$$2x + by = 16$$

$$4x + 8y = g.$$

۲- معادله زیر را با روش گوس-جردن حل کرده و ماتریس پایه متناظر با عملیات سطری را بنویسید.

$$2x - 3y = 3$$

$$4x - 5y + z = 7$$

$$2x - y - 3z = 5.$$

۳- در صورتی که معادله ۱ پاسخی نداشته باشد و معادله ۲ تنها یک پاسخ داشته باشد

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$Ax = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

الف) چه اطلاعاتی راجع به مرتبه و رنک ماتریس A دارید؟

ب) فضای پوچ ماتریس A را به طور کامل توصیف کنید.

ج) چند مثال برای ماتریس A بیاورید.

۴- با روش حذفی ماتریس های زیر را به صورت LU بنویسید.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}.$$

۵- اگر یک ماتریس با عملیات سطری مقدماتی زیر به ماتریس یکانی سه در سه تبدیل شود ماتریس و معکوس آن و همچنین ماتریس

L در فرم LU مربوطه را بنویسید.

الف) کم کردن چهار برابر سطر یک از دو

ب) کم کردن سه برابر سطر یک از سه

ج) کم کردن سطر سه از یک

۶- در ماتریس های سه قطری علاوه بر قطر اصلی در دو قطر مجاور نیز درایه های غیر صفرند و بقیه درایه ها صفرند. با روش حذفی ماتریس های سه قطری زیر را به صورت LU بنویسید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad A = \begin{bmatrix} a & a & 0 \\ a & a+b & b \\ 0 & b & b+c \end{bmatrix}.$$

۷- با عملیات گوس-جردن معکوس ماتریس A را بیابید.

$$[A \quad I] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

۸- به ازای مقادیر مختلف کمیت C پایه فضای ستونی ماتریس زیر را بیابید. همچنین پایه فضای پوچ و کل جواب های معادله زیر را بیابید.

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 \\ c \\ 0 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & c & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

۹- به طور کلی اگر یک ماتریس دارای تعداد ستون بیش از تعداد سطر باشد درباره بعد فضای پوچ آن چه می توان گفت؟

۱۰- نشان دهید که تمامی ماتریس های $n \times n$ که منفرد نیستند تشکیل یک فضای برداری نمی دهند.

۱۱- در فضای ماتریس های سه در سه آیا تمامی ماتریس هایی که فرم اجلن هستند را می توان به عنوان یک فضای برداری در نظر گرفت؟ پایه ای برای این فضا بنویسید.

۱۲- فرم کاهش یافته سطری اجلن را برای دو ماتریس زیر نوشته و بردارهای پایه ای برای فضای پوچ هر یک بیابید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

۱۳- ثابت کنید $\text{rank}(AB) \leq \text{rank}(B)$ و $\text{rank}(AB) \leq \text{rank}(A)$

۱۴- نشان دهید که یک دسته معادله خطی نمی تواند دقیقاً دو جواب داشته باشد.