

۱- اگر سه بردار اورتونرمال q_1 و q_2 و q_3 را داشته باشیم مقادیر دترمینان های زیر را محاسبه کنید:

(a) $\det \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \end{bmatrix} =$

(b) $\det \begin{bmatrix} q_1 + q_2 & q_2 + q_3 & q_3 + q_1 \end{bmatrix} =$

(c) $\det \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \end{bmatrix} \text{ times } \det \begin{bmatrix} q_2 & q_3 & q_1 \end{bmatrix} =$

۲- اگر مقادیر گزارش شده از یک آزمایش که انتظار می رود رفتار خطی را پیروی کنند به صورت ۱۰ نقطه در زمان های ۰ تا ۹ ثانیه با فاصله زمانی ۱ ثانیه باشد و داده اندازه گیری شده در همه زمان ها برابر با ۰ و فقط در زمان ۵ ثانیه ۱ باشد بهترین خط ممکن گذرنده از این نقاط را بیابید. نقاط و خط را رسم نموده و نتیجه را بررسی کنید. برای حل چنین مسئله ای شما در حقیقت بردار b را به چه فضایی تصویر کرده اید؟ فضای عمود بر این فضا را توصیف کنید.

۳- اگر ماتریسی به شکل زیر داشته باشیم یعنی درایه های سطر و ستون اول همگی برابر با X باشند و بقیه درایه ها عدد باشند دترمینان این ماتریس یک چند جمله ای بر حسب X خواهد بود. حداکثر مرتبه این چند جمله ای چند است؟

$$A = \begin{bmatrix} X & X & X & X \\ X & \text{any numbers} \\ X & \text{any numbers} \\ X & \text{any numbers} \end{bmatrix}$$

اگر ۹ مولفه عددی همان ماتریس همانی باشد آنگاه به ازای چه مقداری از X دترمینان صفر است.

۴- دترمینان یک ماتریس تصویر چند است.

۵- در فضای R^5 سه بردار a_1 و a_2 و a_3 توسط روش گرام-اشمیت به سه بردار اورتونرمال q_1 و q_2 و q_3 تبدیل می شوند. هر یک از این دسته بردارها را در ستون های یک ماتریس 5×3 قرار داده و دو ماتریس A و Q را بسازید.

بر اساس ماتریس A و Q ماتریس های تصویر به فضای ستونی این دو ماتریس P_Q و P_A را بسازید. آیا این دو ماتریس مساوی هستند؟ ضرب هر یک از این ماتریس های تصویر در خود ماتریس A و Q چه نتیجه ای می دهد؟ رنک ماتریس های تصویر چند است.

۶- برای ماتریس A به صورت زیر تصویر بردار b به فضای ستونی A را بیابید و ماتریس تصویر را محاسبه کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

۷- با استفاده از روابط ماتریسی (بررسی فضای پوچ ماتریس های اورتونرمال) نشان دهید که چند بردار اورتونرمال مستقل خطی هستند.

۸- بردارهای اورتوگونالی که فضایی با پایه زیر را پوشش می دهد را محاسبه کنید.

$$\mathbf{a} = (1, -1, 0, 0), \mathbf{b} = (0, 1, -1, 0), \mathbf{c} = (0, 0, 1, -1).$$

۹- در صورتی که بدانیم دترمینان تمام ماتریس های پاسکال ۱ است دترمینان دوم را محاسبه کنید.

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{bmatrix} = 1 \text{ (known)} \quad \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 19 \end{bmatrix} = 0 \text{ (to explain).}$$

۱۰- به ساده ترین روش ممکن دترمینان زیر را محاسبه کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

۱۱- مقادیر ویژه را محاسبه کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ and } C = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

۱۲- ماتریس زیر را با یک ماتریس قطری مشابه کنید. حد این ماتریس وقتی به توان بی نهایت برسد را بررسی کنید.

$$A = \begin{bmatrix} .6 & .9 \\ .4 & .1 \end{bmatrix}.$$

۱۳- مقادیر ویژه ماتریس معکوس چه ارتباطی با مقادیر ویژه یک ماتریس دارند؟

۱۴- اگر بدانیم که مقادیر ویژه ماتریس B 3×3 برابر با ۰ و ۱ و ۲ است کدام یک از مقادیر زیر قابل محاسبه است (۳ مورد)

کدام را با این اطلاعات نمی توان محاسبه کرد؟

الف) رنک B

ب) دترمینان $B^T B$

ج) مقادیر ویژه $B^T B$

د) مقادیر ویژه $(B^2 + I)^{-1}$